Lógica y Computabilidad
Segundo Cuatrimestre de 2020
Primer Parcial

Departamento de Computación
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

IMPORTANTE:
Resolver **cada ejercicio en hojas distintas**, pero poner todo en un mismo archivo PDF.
Poner nombre y LU en **todas las hojas**.
El examen es de **resolución individual**, **a libro abierto** y pueden usar lo demostrado en clase o en ejercicios de las guías poniendo **referencias claras y precisas** de dónde viene.
Justificar todas las respuestas.
La resolución debe ser enviada por mail a **logicaycomputabilidad@gmail.com** antes de las 21:15 hs, como un archivo con nombre en el formato *[Apellido]-[Nombre]-[LU]-ParcialComputabilidad*

Ejercicio 1. Sea $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ una función primitiva recursiva. Sea C una clase PRC de funciones. Definimos:

$$S_f(x,y) = \begin{cases} m_{x,y} & \text{Si el programa de número } x \text{ con entrada } y \text{ termina en } f(y) \text{ o menos pasos. En este caso, } m_{x,y} \text{ representa la mínima cantidad de pasos en la cual el programa } x \text{ termina con entrada } y. \\ f(y)+1 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

$$g(z) = \begin{cases} 1 & \text{si } S_f(\ell(z), z) \leq S_f(r(z), z) < f(z)+1 \\ 0 & \text{en otros casos} \end{cases}$$

donde ℓ, r son los observadores de pares.

a. Demostrar que $S_f \in C$.

b. Demostrar que $g \in C$.

Ejercicio 2. Resolver:

a. Decidir si $\{x : \Phi_x$ es (total) estrictamente creciente o $(\forall y : \mathbb{N})\ \Phi_x(y) = 1\ \}$ es computable. Justificar.

b. Decidir si $\{x : \exists\ a, b, c \in \mathbb{N}$ tal que $x = \langle a, b\rangle \wedge$ c es primo $\wedge\ \Phi_a(c)\downarrow \wedge\ \Phi_b(c)\downarrow \wedge\ \Phi_a(c) = \Phi_b(c)\}$ es computablemente enumerable. Justificar.

Ejercicio 3. Definimos el siguiente predicado:

$$P(i,x,e) = \begin{cases} 1 & \text{si la instrucción } i{+}1\text{-ésima del código del programa con número } e \text{ es alcanzada en algún momento del cómputo de ese programa cuando la única entrada es } x \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Observación: cuando un programa con m instrucciones termina, decimos (con cierto abuso de terminología) que alcanza a la instrucción $m+1$-ésima. Un programa con m instrucciones no alcanza nunca a ninguna instrucción posterior a la $m+1$-ésima.

Sea $f : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ la siguiente función

$$f(i,e) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists x \mid P(i,x,e) \text{ es verdadero} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

a. Demostrar que P no es computable. Justificar.

b. Decidir si f es computable. Justificar.